



TITLE:

パラフェルミオン頂点作用素代数  
の $C_2$ 有限性 (有限群とその表現,  
頂点作用素代数, 組合せ論の研究)

AUTHOR(S):

山田, 裕理

---

CITATION:

山田, 裕理. パラフェルミオン頂点作用素代数の $C_2$ 有限性 (有限群と  
その表現, 頂点作用素代数, 組合せ論の研究). 数理解析研究所講究録  
2012, 1811: 93-108

ISSUE DATE:

2012-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194500>

RIGHT:

## パラフェルミオン頂点作用素代数の $C_2$ 有限性

山田 裕理 (Hiromichi Yamada)  
一橋大学大学院経済学研究科  
yamada@econ.hit-u.ac.jp

### 1 はじめに

$\mathfrak{g}$  を有限次元単純リー代数,  $k$  を正の整数とする.  $\mathfrak{g}$  に付随するアフィンリー代数  $\widehat{\mathfrak{g}}$  のレベル  $k$  の既約最高ウェイト加群, すなわち可積分最高ウェイト加群  $L(k, 0)$  は, 頂点作用素代数の構造を持つ.  $L(k, 0)$  には,  $\mathfrak{g}$  のカルタン部分代数  $\mathfrak{h}$  から定義されるハイゼンベルグ頂点作用素代数  $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k, 0)$  が部分頂点作用素代数として含まれる.  $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k, 0)$  の  $L(k, 0)$  における commutant を, パラフェルミオン頂点作用素代数と呼ぶ. 本稿では, このパラフェルミオン頂点作用素代数を  $K(\mathfrak{g}, k)$  で表すことにする.

パラフェルミオン頂点作用素代数は  $W$  代数の重要な例であり, これまでに様々な研究がなされてきた.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  の場合のパラフェルミオン頂点作用素代数の基本的な性質は, [1, 2] で考察されている. また [3, 4] では, 一般の場合の  $K(\mathfrak{g}, k)$  について論じられている.

本稿では  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  の場合のパラフェルミオン頂点作用素代数  $K(\mathfrak{sl}_2, k)$  について, 最近得られた次の結果を紹介する. なお, ここで用いる用語については第 2 節で説明する.

(1)  $K(\mathfrak{sl}_2, k)$  の  $C_2$  代数の次元は  $k(k+1)/2$  である. 特に,  $K(\mathfrak{sl}_2, k)$  は  $C_2$  余有限である.

(2)  $K(\mathfrak{sl}_2, k)$  の Zhu 代数  $A(K(\mathfrak{sl}_2, k))$  は半単純で, その次元は  $k(k+1)/2$  である.

(3) [2] で構成された  $K(\mathfrak{sl}_2, k)$  の  $k(k+1)/2$  個の既約加群  $M^{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq k$ ,  $0 \leq j \leq i-1$  は,  $K(\mathfrak{sl}_2, k)$  の既約加群の同型類の完全代表系である.

$k$  が小さいときには, これらの性質は以前から知られていた. 実際  $k = 2, 3, 4$  のときは,  $K(\mathfrak{sl}_2, k)$  は特別な頂点作用素代数に同型であり,  $C_2$  余有限性, 有理性をはじめ詳しい性質が調べられている. また  $k = 5, 6$  の場合は, [2] において (1), (2), (3) が証明されている. 本稿では,  $k \geq 5$  の一般的な場合を扱う.

本稿の内容は, 荒川知幸, Ching Hung Lam との共同研究に基づくものである. 安部利之, 桑原敏郎, 鈴木武史, 山内博, 横山和弘の各氏には, 様々な議論を通して貴重なアドバイスをいただきました. 感謝いたします.

## 2 用語と基本事項

この節では本稿で用いる記号, 用語, および基本的な事項を説明する. 頂点作用素代数  $V = (V, Y, \mathbf{1}, \omega)$  に関する記号は [7, 11] に従う.  $V$  はウエイトにより次数付けられた  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間であるが, 本稿で扱う頂点作用素代数はすべて CFT type, すなわち  $V = \sum_{n \geq 0} V_{(n)}$ ,  $V_{(0)} = \mathbb{C}\mathbf{1}$  である.  $v \in V_{(n)}$  のとき,  $v$  はウエイト  $n$  の斉次なベクトルであるといい  $\text{wt } v = n$  と表す. また  $V_{(n)}$  をウエイト  $n$  の部分空間という.

$v \in V$  に対して, その頂点作用素と呼ばれる  $\text{End } V$  の母関数

$$Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$

が定義されていて, ある公理系を満たすものが頂点作用素代数である.  $z$  は形式的な変数で,  $v_n \in \text{End } V$  である.  $v$  が斉次なベクトルのとき,  $v_n V_{(m)} \subset V_{(m+\text{wt } v-n-1)}$  が成り立つ. このことを,  $v_n$  はウエイト  $\text{wt } v - n - 1$  の線形作用素であるという.  $\mathbf{1}$  は真空ベクトルと呼ばれ,  $Y(\mathbf{1}, z) = \text{id}_V$ , すなわち  $\mathbf{1}_n = \delta_{n,-1} \text{id}_V$ , およびすべての  $v \in V$  について  $v_{-1} \mathbf{1} = v$  という性質がある.  $\omega$  は共形元あるいはヴィラソロ元と呼ばれるウエイト 2 のベクトルで,  $L(n) = \omega_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  は  $V$  上のヴィラソロ代数の表現を与える. すなわち,  $V$  の線形作用素として

$$[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n) + \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n,0} c$$

を満たす. ここで,  $c$  は頂点作用素代数の中心電荷と呼ばれる定数である.  $L(0) = \omega_1$  はウエイト 0 の作用素であり, 各  $V_{(n)}$  に  $n$  倍として作用する. 言い換えると,  $V_{(n)}$  は  $L(0)$  の固有値  $n$  の固有空間である.

本稿で必要となる公式をまとめておく.

$$[a_m, b_n] = \sum_{i \geq 0} \binom{m}{i} (a_i b)_{m+n-i}, \quad (2.1)$$

$$(a_m b)_n = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{m}{i} (a_{m-i} b_{n+i} - (-1)^m b_{m+n-i} a_i), \quad (2.2)$$

$$b_n a = (-1)^{n+1} \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} L(-1)^i a_{n+i} b, \quad (2.3)$$

$$[L(-1), a_n] = (L(-1)a)_n = -n a_{n-1} \quad (2.4)$$

頂点作用素代数  $V$  に対して,

$$C_2(V) = \text{span}_{\mathbb{C}} \{a_{-2}b \mid a, b \in V\}$$

とおき,  $V$  の  $C_2(V)$  による商空間  $V/C_2(V)$  を  $R_V$  で表す.  $a \cdot b = a_{-1}b \bmod C_2(V)$  および  $\{a, b\} = a_0b \bmod C_2(V)$  で定義される 2つの演算により,  $R_V$  は可換な Poisson 代数になる (cf. [13, Section 4.4]). これを頂点作用素代数  $V$  の  $C_2$  代数と呼ぶ.  $R_V$  は有限次元とは限らないが, これが有限次元のとき頂点作用素代数  $V$  は  $C_2$  余有限であるという.

斉次な元  $a, b \in V$  に対して,

$$a * b = \sum_{i=0}^{\text{wt } a} \binom{\text{wt } a}{i} a_{i-1}b, \quad a \circ b = \sum_{i=0}^{\text{wt } a} \binom{\text{wt } a}{i} a_{i-2}b$$

という 2つの演算を定義する. これらの演算を, 線形性により斉次とは限らない一般の元に対して拡張する.

$$O(V) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{a \circ b \mid a, b \in V\}$$

とおく.  $O(V)$  は演算  $a * b$  に関して両側イデアルであり, したがって商空間  $A(V) = V/O(V)$  に演算が自然に引き起こされる (cf. [13, Theorem 2.1.1]).  $(A(V), *)$  は, 頂点作用素代数  $V$  の Zhu 代数と呼ばれる結合代数である.  $A(V)$  の既約表現と頂点作用素代数  $V$  の既約表現は 1 対 1 に対応する, という著しい性質がある (cf. [13, Theorem 2.2.2]).

$C_2$  余有限性とともな大切な概念として, 有理性というものがある. 頂点作用素代数が有理的であるとは, 任意の  $\mathbb{N}$  次数付き弱加群が完全可約であることをいう.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  の場合のパラフェルミオン頂点作用素代数を, [1, 2] に沿って説明する. 正の整数  $k$  をひとつ固定する.  $\mathfrak{sl}_2$  に付随するレベル  $k$  のアフィン頂点作用素代数の説明から始める.  $\{h, e, f\}$  を  $\mathfrak{sl}_2$  の Chevalley 基底とする. すなわち  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$  であり, また正規化された Killing 形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  について  $\langle h, h \rangle = 2$ ,  $\langle e, f \rangle = 1$ ,  $\langle h, e \rangle = \langle h, f \rangle = \langle e, e \rangle = \langle f, f \rangle = 0$  である. アフィンリー代数  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C$  のレベル  $k$  の Weyl 加群

$$V(k, 0) = V_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(k, 0) = \text{Ind}_{\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}C}^{\widehat{\mathfrak{sl}}_2} \mathbb{C}$$

を考える. これは,  $\mathbb{C}$  を  $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$  が 0 として作用し,  $C$  が  $k$  として作用するような  $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}$  加群と見て, それを  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  加群に誘導したものである.  $1 \in \mathbb{C}$  に対応する  $V(k, 0)$  の最高ウェイトベクトルを  $\mathbf{1}$  で表す.  $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$  および  $\mathbb{C}$  は, それぞれ 0,  $k$  として  $\mathbf{1}$  に作用する.  $a \otimes t^n$ ,  $a \in \{h, e, f\}$  の  $V(k, 0)$  への作用を  $a(n)$  で表す.  $a, b \in \{h, e, f\}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  について,  $a(m)$  と  $b(n)$  の交換関係は

$$[a(m), b(n)] = [a, b](m+n) + m\langle a, b \rangle \delta_{m+n, 0} k \quad (2.5)$$

であり,  $n \geq 0$  ならば  $a(n)\mathbf{1} = 0$  である. さらに,

$$h(-i_1) \cdots h(-i_p) e(-j_1) \cdots e(-j_q) f(-m_1) \cdots f(-m_r) \mathbf{1} \quad (2.6)$$

$i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq 1, j_1 \geq \cdots \geq j_q \geq 1, m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 1, p, q, r \geq 0$  は  $V(k, 0)$  の基底になる.

$\text{End } V(k, 0)$  の 2 つの母関数  $a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)z^{-n-1}$ ,  $b(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n)z^{-n-1}$  に対して,

$$a(z)_n b(z) = \text{Res}_w ((w-z)^n a(w)b(z) - (-z+w)^n b(z)a(w))$$

と定義する. さらに,  $a^i \in \{h, e, f\}$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$  について,

$$Y(a^1(n_1) \cdots a^r(n_r) \mathbf{1}, z) = a^1(z)_{n_1} \cdots a^r(z)_{n_r} \text{id}_{V(k, 0)}$$

として  $v = a^1(n_1) \cdots a^r(n_r) \mathbf{1} \in V(k, 0)$  のときの頂点作用素

$$Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \in (\text{End } V(k, 0))[[z, z^{-1}]]$$

を定義する. 特に,  $Y(a(-1)\mathbf{1}, z) = a(z)$  である.

$$\omega_{\text{aff}} = \frac{1}{2(k+2)} \left( -h(-2)\mathbf{1} + \frac{1}{2}h(-1)^2\mathbf{1} + 2e(-1)f(-1)\mathbf{1} \right)$$

とおくと,  $(V(k, 0), Y, \mathbf{1}, \omega_{\text{aff}})$  は中心電荷  $3k/(k+2)$  の頂点作用素代数である (cf. [8], [11, Section 6.2]). (2.6) の形の元はウエイト

$$i_1 + \cdots + i_p + j_1 + \cdots + j_q + m_1 + \cdots + m_r$$

であり, また作用素  $h(0)$  に関して固有値  $2(q-r)$  の固有値ベクトルである.

$h(-i_1) \cdots h(-i_p)\mathbf{1}$ ,  $i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq 1$  で張られる  $V(k, 0)$  の部分空間  $M_{\vec{i}}(k, 0)$  は, ハイゼンベルグ頂点作用素代数と呼ばれる部分頂点作用素代数になる. その共形元は

$$\omega_{\gamma} = \frac{1}{4k} h(-1)^2 \mathbf{1}$$

で, 中心電荷は 1 である.

$M_{\vec{i}}(k, 0)$  の  $V(k, 0)$  における commutant

$$\mathcal{N} = \{v \in V(k, 0) \mid h(n)v = 0 \text{ for } n \geq 0\}$$

は,  $W^2 = \omega_{\text{aff}} - \omega_{\gamma}$  すなわち

$$W^2 = \frac{1}{2k(k+2)} \left( -kh(-2)\mathbf{1} - h(-1)^2\mathbf{1} + 2ke(-1)f(-1)\mathbf{1} \right)$$

を共形元とする中心電荷  $3k/(k+2) - 1 = 2(k-1)/(k+2)$  の頂点作用素代数である.

頂点作用素代数  $\mathcal{N}$  は, 共形元  $W^2$  とウエイト 3 の元

$$\begin{aligned} W^3 &= k^2 h(-3)\mathbf{1} + 3kh(-2)h(-1)\mathbf{1} + 2h(-1)^3\mathbf{1} - 6kh(-1)e(-1)f(-1)\mathbf{1} \\ &\quad + 3k^2 e(-2)f(-1)\mathbf{1} - 3k^2 e(-1)f(-2)\mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

で頂点作用素代数として生成される. しかし, 頂点作用素代数として  $\mathcal{N}$  を良い形で記述するには, このほかに  $W^4$  と  $W^5$  というそれぞれウエイトが 4 と 5 の元が必要である.  $W^4, W^5$  については [2, Appendix A] を参照していただくこととして, ここではそれらの主要な性質を述べる. まず最初に,  $W^s, s = 3, 4, 5$  はウエイト  $s$  の Virasoro primary, すなわち  $W_2^2 W^s = W_3^2 W^s = 0$  を満たす元として, 定数倍を除いて一意的に定まることに注意する.  $W^2, W^3, W^4, W^5$  が大切な理由は,

$$W_{-i_1}^2 \cdots W_{-i_p}^2 W_{-j_1}^3 \cdots W_{-j_q}^3 W_{-m_1}^4 \cdots W_{-m_r}^4 W_{-n_1}^5 \cdots W_{-n_s}^5 \mathbf{1} \quad (2.8)$$

$i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq 1, j_1 \geq \cdots \geq j_q \geq 1, m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 1, n_1 \geq \cdots \geq n_s \geq 1$  により  $\mathcal{N}$  がベクトル空間として張られることである (cf. [1, Theorem 3.1], [2, Lemma 2.4]). さらに  $W_n^r W^s, r, s = 2, 3, 4, 5, n \geq 0$  は, (2.8) の形の元の線形結合としての具体的な表示が知られている ([2, Appendix B]). したがって, (2.1) と (2.2) の公式を用いれば, 原理的には作用素の交換関係  $[W_m^r, W_n^s]$  がわかることになる. ただし非常に複雑なため, このような方針で  $[W_m^r, W_n^s]$  を考えることは現実的ではない.

頂点作用素代数  $\mathcal{N}$  の自己同型群は,  $\theta$  で生成される位数 2 の群である. ここで  $\theta$  は  $\theta(W^s) = (-1)^s W^s, s = 2, 3, 4, 5$  を満たす.

$V(k, 0)$  も  $\mathcal{N}$  も単純な頂点作用素代数ではない. 実際,  $V(k, 0)$  は唯一つの極大イデアル  $\mathcal{I}$  を持ち,  $\mathcal{I}$  は 1 個の特異ベクトル  $e(-1)^{k+1} \mathbf{1}$  で生成される (cf. [10]). また,  $\mathcal{I} = \mathcal{I} \cap \mathcal{N}$  は  $\mathcal{N}$  の唯一つの極大イデアルで, 1 個の特異ベクトル

$$\mathbf{u}^0 = f(0)^{k+1} e(-1)^{k+1} \mathbf{1}$$

で生成される (cf. [1, Theorem 4.2], [2, Lemma 3.1]).

$V(k, 0)$  の  $\mathcal{I}$  による商空間

$$L(k, 0) = L_{\widehat{sl}_2}(k, 0) = V(k, 0) / \mathcal{I}$$

は, 単純な頂点作用素代数である. これは, 可積分最高ウエイト  $\widehat{sl}_2$  加群にほかならない.  $M_{\widehat{g}}(k, 0) \cap \mathcal{I} = 0$  であり,  $L(k, 0)$  はハイゼンベルグ頂点作用素代数  $M_{\widehat{g}}(k, 0)$  と同型な部分頂点作用素代数を含む. この部分頂点作用素代数の  $L(k, 0)$  における commutant が  $sl_2$  に付随するパラフェルミオン頂点作用素代数  $K(sl_2, k)$  である. 以下これを  $\mathcal{W}$  で表す.

$$\mathcal{W} = K(sl_2, k) = \{v \in L(k, 0) \mid h(n)v = 0 \text{ for } n \geq 0\}$$

$\mathcal{W} \cong \mathcal{N} / \mathcal{I}$  であることに注意する.  $\mathcal{W}$  のウエイト  $n$  の部分空間  $\mathcal{W}_{(n)}$  については,  $\mathcal{W} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{W}_{(n)}, \mathcal{W}_{(0)} = \mathbb{C} \mathbf{1}$  で,  $\mathcal{W}_{(1)} = 0$  である. さらに,  $\mathcal{W}_{(2)} = \mathbb{C} W^2, \dim \mathcal{W}_{(3)} = 2, \dots$  である.

記号が煩雑になることを避けるため,  $W^s \in \mathcal{N}, s = 2, 3, 4, 5$  の  $\mathcal{W} \cong \mathcal{N} / \mathcal{I}$  における像を, 同じ記号  $W^s$  で表すことにする. 同様に, (2.6) の形の  $V(k, 0)$  の元の  $L(k, 0) = V(k, 0) / \mathcal{I}$  における像も,  $V(k, 0)$  の元と同じ記号で表す.

$k \leq 4$  のとき、頂点作用素代数  $\mathcal{W}$  はよく知られた特別な頂点作用素代数になる。実際  $k = 2, 3, 4$  のとき、 $\mathcal{W}$  はそれぞれ Ising model  $\mathcal{L}(1/2, 0)$ , 3-state Potts model  $\mathcal{L}(4/5, 0) \oplus \mathcal{L}(4/5, 3)$ ,  $V_{\mathbb{Z}\beta}^+$  (ただし  $\langle \beta, \beta \rangle = 6$ ) に同型である。なお  $\mathcal{W}$  において、 $k = 2$  のときは  $W^3 = W^4 = W^5 = 0$ ,  $k = 3$  のときは  $W^4 = W^5 = 0$ ,  $k = 4$  のときは  $W^5 = 0$  である。また  $k = 1$  のときは  $\mathcal{W} = \mathbb{C}$  である。すなわち、 $k \leq 4$  の場合は退化したものになる。このため、以下では  $k \geq 5$  と仮定する。

本稿での記号は [1, 2] に沿っているが、若干の違いがある。 $W^2, \mathcal{N}, \mathcal{W}, \mathcal{I}$  は [1, 2] ではそれぞれ  $\omega, N_0, K_0 = M^{0,0}, \tilde{\mathcal{I}}$  と表記されている (cf. [1, Theorems 3.1, 4.1, 4.2])。

### 3 埋め込み $R_{\mathcal{N}} \hookrightarrow R_{V(k,0)}$

この節では  $R_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}/C_2(\mathcal{N})$  を考察し、それが  $R_{V(k,0)} = V(k,0)/C_2(V(k,0))$  に自然に埋め込まれることを示す。 $\mathcal{W} = \mathcal{N}/\mathcal{I}$  だから  $C_2(\mathcal{W}) = (C_2(\mathcal{N}) + \mathcal{I})/\mathcal{I}$  であり、したがって  $\mathcal{W}/C_2(\mathcal{W}) \cong \mathcal{N}/(C_2(\mathcal{N}) + \mathcal{I})$  である。

$\mathcal{N}$  は (2.8) の形の元で張られるので、可換な結合代数として  $R_{\mathcal{N}}$  は 4 個の元  $\widetilde{W}^s = W^s + C_2(\mathcal{N})$ ,  $s = 2, 3, 4, 5$  で生成される。よって、 $\mathcal{N}$  は 4 変数多項式環の準同型像である。

$$\varphi : \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4, x_5] \rightarrow R_{\mathcal{N}}; \quad x_s \mapsto \widetilde{W}^s = W^s + C_2(\mathcal{N})$$

$u$  を (2.8) の形の元とする。添字の中にひとつでも  $-2$  以下のものがあれば  $u \in C_2(\mathcal{N})$  である。よって、 $u = (W_{-1}^2)^p (W_{-1}^3)^q (W_{-1}^4)^r (W_{-1}^5)^s \mathbf{1}$  の場合を考える。 $\theta(u) = (-1)^{q+s}$  であること、およびこの  $u$  のウエイトが  $2p + 3q + 4r + 5s$  であることより、次の補題がわかる。

**補題 3.1**  $\mathcal{N}$  の斉次ベクトル  $v$  について、 $\text{wt } v$  が奇数で  $\theta(v) = v$  であるか  $\text{wt } v$  が偶数で  $\theta(v) = -v$  であれば、 $v \in C_2(\mathcal{N})$  である。

この補題より特に  $W_0^r W^s \in C_2(\mathcal{N})$ ,  $r, s = 2, 3, 4, 5$  となるが、このことから

$$W_0^r \mathcal{N} \subset C_2(\mathcal{N}), \quad r = 2, 3, 4, 5$$

がわかる。これを用いると、次のことが証明できる。

**補題 3.2**  $r = 2, 3, 4, 5$  について、 $W_1^r C_2(\mathcal{N}) \subset C_2(\mathcal{N})$  であり、 $u \in \mathcal{N}$  に対して  $W_1^r \cdot \widetilde{u} = W_1^r u + C_2(\mathcal{N})$  として定義される  $W_1^r$  の  $R_{\mathcal{N}}$  への作用は、 $\widetilde{W}^s$ ,  $s = 2, 3, 4, 5$  で生成される可換な結合代数  $R_{\mathcal{N}}$  の微分作用素である。

さらに、(2.8) の形の元の線形結合としての  $W_1^3 W^s$ ,  $s = 2, 3, 4, 5$  の表示がわかっているので、 $W_1^3$  の  $\widetilde{W}^s$  への作用は具体的に記述できる。このように、modulo  $C_2(\mathcal{N})$  では  $W_1^3$  の作用が計算可能になることが大切である。

次に,  $R_{V(k,0)}$  において考える.  $v \in V(k,0)$  の  $R_{V(k,0)}$  における像を  $\bar{v}$  で表す:  
 $\bar{v} = v + C_2(\mathcal{N})$ .

$$y_0 = \overline{h(-1)\mathbf{1}}, \quad y_1 = \overline{e(-1)\mathbf{1}}, \quad y_2 = \overline{f(-1)\mathbf{1}} \quad (3.1)$$

とおくと,  $R_{V(k,0)}$  は  $y_0, y_1, y_2$  を変数とする多項式環  $\mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$  に同型である.

$\mathcal{N} \subset V(k,0)$  により  $C_2(\mathcal{N}) \subset C_2(V(k,0))$  だから,

$$\psi: R_{\mathcal{N}} \rightarrow R_{V(k,0)}; \quad \tilde{v} = v + C_2(\mathcal{N}) \mapsto \bar{v} = v + C_2(V(k,0))$$

という自然な準同型が考えられる.

$$\mathcal{A} = \mathcal{N} + C_2(V(k,0))$$

とおく.  $\mathcal{A}$  は準同型  $\psi$  の像であり,  $\varphi$  と  $\psi$  の合成写像

$$\psi \circ \varphi: \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4, x_5] \rightarrow R_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{A}; \quad x_s \mapsto \widetilde{W}^s \mapsto \overline{W}^s.$$

は結合代数の全準同型となる.  $y = y_0, z = y_1 y_2$  とおくと,  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}[y, z]$  が成り立つ.  $y, z$  はそれぞれ  $V(k,0)$  のウエイト 1 の元  $h(-1)\mathbf{1}$  およびウエイト 2 の元  $e(-1)f(-1)\mathbf{1}$  に対応する. そこで  $y$  と  $z$  のウエイトをそれぞれ  $\text{wt } y = 1, \text{wt } z = 2$  と定める. これにより多項式環  $\mathbb{C}[y, z]$  にウエイトが定義される.  $\mathbb{C}[y, z]$  のウエイト  $n$  の部分空間を  $\mathbb{C}[y, z]_{(n)}$  で表す. また,  $\mathcal{A}_{(n)} = \mathbb{C}[y, z]_{(n)} \cap \mathcal{A}$  とおく.

(2.8) の形の元は, ウエイトが 7 以下であれば線形独立であるが, ウエイトが 8 以上では線形独立ではない. (2.8) の形の元の間の非自明な線形関係は null field と呼ばれる. null field は  $\mathbf{v} = 0$  の形式で表す.  $\mathbf{v}$  は (2.8) の形の元の線形結合であり,  $\mathbf{v} = 0$  が  $\mathcal{N}$  における非自明な線形関係である.  $\mathbf{v}$  自身を簡単に null field ともいう.

ウエイト 8 の null field  $\mathbf{v}$  全体は 2 次元部分空間をなし, 自己同型  $\theta$  の固有値 1 および  $-1$  の固有空間に 1 次元ずつわかれる. 補題 3.1 により,  $\theta(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$  となるウエイト 8 の null field  $\mathbf{v}$  は  $C_2(\mathcal{N})$  に含まれるので,  $R_{\mathcal{N}}$  においては何の情報ももたらさない. ウエイト 8 の null field  $\mathbf{v}$  で  $\theta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  となるものは定数倍を除いて唯一つである. そのひとつを  $\mathbf{v}^0$  とおく.  $\mathbf{v}^0$  の (2.8) の形の元による線形結合としての表示は知られている (cf. [2, Appendix C]). よって  $\mathbf{v}^0$  の  $R_{\mathcal{N}}$  における像は,  $\widetilde{W}^s, s = 2, 3, 4, 5$  の多項式として具体的に記述できる. すでに説明したように  $W_1^3$  の  $R_{\mathcal{N}}$  への作用は計算可能だから,  $\mathbf{v}^1 = W_1^3 \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^2 = (W_1^3)^2 \mathbf{v}^0$  の  $R_{\mathcal{N}}$  における像についても同様に,  $\widetilde{W}^s, s = 2, 3, 4, 5$  の多項式として具体的に記述することができる.

準同型  $\varphi: \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4, x_5] \rightarrow R_{\mathcal{N}}$  により  $\varphi(B_i) = \tilde{\mathbf{v}}^i, i = 0, 1, 2$  となるような  $B_i \in \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4, x_5]$  を考える. このとき, 合成写像  $\psi \circ \varphi$  の核  $\text{Ker } \psi \circ \varphi$  は,  $B_0, B_1, B_2$  で生成される  $\mathbb{C}[x_2, x_3, x_4, x_5]$  のイデアル  $\langle B_0, B_1, B_2 \rangle$  に一致することが Gröbner 基底の計算からわかる<sup>1</sup>.  $\mathcal{N}$  において  $\mathbf{v}^i = 0, i = 0, 1, 2$  だから,  $R_{\mathcal{N}}$  において  $\tilde{\mathbf{v}}^i = 0$  であり, したがって  $\varphi(B_i) = 0, i = 0, 1, 2$  である. これは  $\psi: R_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{A}$  が同型であることを意味する. よって, 次の定理が得られた.

<sup>1</sup>Gröbner 基底の計算には計算機代数システム Risa/Asir を用いた.



**定理 3.3** (1)  $R_{\mathcal{N}} \cong \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4, x_5]/\langle B_0, B_1, B_2 \rangle$

(2)  $C_2(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \cap C_2(V(k, 0))$  であり, 特に  $R_{\mathcal{N}} \cong \mathcal{A}$

$\mathcal{N}$  の null field は無限個存在するが, この定理により modulo  $C_2(\mathcal{N})$  では null field の持つ情報は  $\mathbf{v}^0, W_1^2 \mathbf{v}^0, (W_1^3)^2 \mathbf{v}^0$  の 3 個で尽くされることがわかる.

次に  $W_1^3$  の  $\mathcal{A}$  への作用を定義する. 上記の定理により  $R_{\mathcal{N}} \hookrightarrow R_{V(k, 0)}$  であるが,  $C_2(V(k, 0))$  は作用素  $W_1^3$  で不変ではないので, 注意が必要である. 補題 3.2 により  $W_1^3$  の  $R_{\mathcal{N}}$  への作用は定義できているので, それを結合代数の同型  $\psi: R_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{A}$  を通して  $\mathcal{A}$  への作用に変換する. すなわち,  $W_1^3$  の  $\overline{W^s} = W^s + C_2(V(k, 0))$  への作用を

$$W_1^3 \cdot \overline{W^s} = \psi(W_1^3 \cdot \widetilde{W^s}), \quad s = 2, 3, 4, 5$$

として定義する.  $W_1^3$  の  $R_{\mathcal{N}}$  への作用では,  $R_{\mathcal{N}}$  の元を  $\widetilde{W^s}$ ,  $s = 2, 3, 4, 5$  の多項式として表したときに微分作用素として作用するので, このように  $W_1^3$  の  $\mathcal{A}$  への作用を定義すると,  $R_{V(k, 0)}$  の元を  $\overline{W^s}$ ,  $s = 2, 3, 4, 5$  の多項式として表したときに微分作用素として作用する.

$\mathcal{A} \subset \mathbb{C}[y, z]$  であるが, ここで定義した  $W_1^3$  の  $\mathcal{A}$  への作用を次のように見ることができる. すなわち, 多項式環  $\mathbb{C}[y, z]$  上の微分作用素

$$D = ((k+2)y^2 - 2kz) \frac{\partial}{\partial y} + (3k+4)yz \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.2)$$

について, 次のことが成り立つ.

**命題 3.4**  $W_1^3$  の  $\mathcal{A}$  への作用は,  $\mathbb{C}[y, z]$  上の微分作用素  $-6kD$  を  $\mathcal{A}$  に制限したものに一致する.

$\mathbb{C}[y, z]$  と  $\mathcal{A}$  のウエイト  $n$  の部分空間  $\mathbb{C}[y, z]_{(n)}$  および  $\mathcal{A}_{(n)}$  の基底に関して, 次の補題が成り立つ.

**補題 3.5** (1)  $n \geq 0$  について,  $\{y^{n-2j}z^j; 0 \leq j \leq [n/2]\}$  は  $\mathbb{C}[y, z]_{(n)}$  の基底で, 特に  $\dim \mathbb{C}[y, z]_{(n)} = [n/2] + 1$  である.

(2)  $\mathcal{A}_{(0)} = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{A}_{(1)} = 0$  で,  $n \geq 2$  のとき  $\{y^n - nky^{n-2}z, y^{n-2j}z^j; 2 \leq j \leq [n/2]\}$  は  $\mathcal{A}_{(n)}$  の基底である. 特に  $n \geq 1$  ならば  $\dim \mathcal{A}_{(n)} = [n/2]$  であり, また  $\mathbb{C}[y, z]_{(n)} = \mathbb{C}y^n \oplus \mathcal{A}_{(n)}$  である.

## 4 $(W_1^3)^r \mathbf{u}^0$ modulo $C_2(V(k, 0))$ , $r = 0, 1, 2, \dots$

この節では特異ベクトル  $\mathbf{u}^0 = f(0)^{k+1}e(-1)^{k+1}\mathbf{1}$  および  $(W_1^3)^r \mathbf{u}^0$ ,  $r = 1, 2, \dots$  の  $R_{V(k, 0)}$  における像を考察する. これらのベクトルは  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}[y, z]$  に含まれる.  $\overline{\mathbf{u}^0} = \mathbf{u}^0 + C_2(V(k, 0))$  を定数倍して

$$f_0(y, z) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \overline{\mathbf{u}^0} \in \mathbb{C}[y, z]$$

とおく.

$f_0(y, z)$  を具体的に求めるために,  $f(0)$  の作用を modulo  $C_2(V(k, 0))$  で計算する. まず最初に,  $C_2(V(k, 0))$  は作用素  $f(0)$  で不変であることに注意する. したがって,  $f(0) \cdot \bar{v} = \overline{f(0)v}$  として  $f(0)$  は  $R_{V(k, 0)}$  に自然に作用する.  $u, v \in V(k, 0)$  について  $f(0)u_{-1}v = (f(0)u)_{-1}v + u_{-1}f(0)v$  が成り立つので,  $f(0)$  は  $R_{V(k, 0)} = \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$  に微分作用素として作用する. より詳しく,  $[f(0), h(-1)] = 2f(-1)$ ,  $[f(0), e(-1)] = -h(-1)$ ,  $[f(0), f(-1)] = 0$  により

$$f(0) \cdot y_0^p y_1^q y_2^r = 2p y_0^{p-1} y_1^q y_2^{r+1} - q y_0^{p+1} y_1^{q-1} y_2^r$$

となるので,  $f(0)$  は  $R_{V(k, 0)}$  に

$$2y_2 \frac{\partial}{\partial y_0} - y_0 \frac{\partial}{\partial y_1} \quad (4.1)$$

として作用することがわかる. この微分作用素を  $y_1^{k+1}$  に  $k+1$  回作用させたものが  $\bar{u}^0$  である. このように考えて計算することにより, 次の定理が得られる.

**定理 4.1**  $f_0(y, z)$  の具体的な形は次のとおりである.

$$f_0(y, z) = \sum_{j=0}^{[(k+1)/2]} c_j y^{k+1-2j} z^j, \quad c_j = (-1)^j \frac{(k+1)!}{(k+1-2j)! (j!)^2}$$

命題 3.4 により,  $f_0(y, z)$  に (3.2) の微分作用素  $D$  を  $r$  回作用させると  $(W_1^3)^r \bar{u}^0 + C_2(V(k, 0))$  を適当に定数倍したものが得られる.

$$f_r(y, z) = D^r f_0(y, z)$$

とおく.

次の補題は, 計算により確かめることができる.

**補題 4.2**  $p(y, z) = -(k+1)(k+2)^2((k+1)y^2 + kz)$ ,  $q(y) = (k+2)(2k+3)y$  とおくと,

$$f_2(y, z) = p(y, z)f_0(y, z) + q(y)f_1(y, z)$$

が成り立つ.

$f_0(y, z)$  と  $f_1(y, z)$  で生成される  $\mathbb{C}[y, z]$  のイデアルを  $J$  で表す.

$$J = \mathbb{C}[y, z]f_0(y, z) + \mathbb{C}[y, z]f_1(y, z)$$

前補題により,  $J$  は微分作用素  $D$  で不変である. さらに次のことが証明できる.

**補題 4.3**  $\dim \mathbb{C}[y, z]/J < \infty$

$J$  のウエイト  $n$  の部分空間を  $J_{(n)}$  で表す:  $J_{(n)} = \mathbb{C}[y, z]_{(n)} \cap J$ .  $f_r(y, z)$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$  はウエイト  $k+1+r$  の斉次多項式であることに注意する. 次の命題は  $J_{(n)}$  の次元を計算するために重要である.

**命題 4.4**  $a(y, z)f_0(y, z) + b(y, z)f_1(y, z) = 0$  が成り立つような多項式  $a(y, z), b(y, z) \in \mathbb{C}[y, z]$  は,  $a(y, z) = h(y, z)f_1(y, z)$ ,  $b(y, z) = -h(y, z)f_0(y, z)$ ,  $h(y, z) \in \mathbb{C}[y, z]$  の形のみに限る.

この命題と補題 3.5 を使うと,  $J$  のウエイト  $n$  の部分空間  $J_{(n)}$  の次元が計算できる.

**補題 4.5** (1)  $n \leq k$  ならば  $J_{(n)} = 0$  で  $J_{(k+1)} = \mathbb{C}f_0(y, z)$

(2)  $k \leq n \leq 2k+2$  ならば  $\dim J_{(n)} = n - k$

(3)  $n \geq 2k+1$  ならば  $J_{(n)} = \mathbb{C}[y, z]_{(n)}$

(4)  $\dim \mathbb{C}[y, z]/J = (k+1)(k+2)/2$

補題 3.5 とこの補題より, 次のことがわかる.

**補題 4.6**  $\dim \mathcal{A}/(J \cap \mathcal{A}) = k(k+1)/2$

次に,  $f_r(y, z)$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$  で生成される  $\mathcal{A}$  のイデアルを調べる. 補題 4.2 の  $p(y, z)$  と  $q(y)$  は  $\mathcal{A}$  に含まれないため,  $\mathbb{C}[y, z]$  のイデアルのときと異なり,  $\mathcal{A}$  のイデアルを扱う際には  $f_0(y, z)$  と  $f_1(y, z)$  の 2 つだけでは不十分である. そこで  $s = 2, 3, \dots$  に対して  $f_r(y, z)$ ,  $0 \leq r \leq s-1$  で生成される  $\mathcal{A}$  のイデアル  $I_s$ , および  $f_r(y, z)$ ,  $r \geq 0$  で生成される  $\mathcal{A}$  のイデアル  $I$  を考える. これらのウエイト  $n$  の部分空間を,  $I_{s(n)}$ ,  $I_{(n)}$  のように表す.

$s = 2$  のときの  $I_2 = \mathcal{A}f_0(y, z) + \mathcal{A}f_1(y, z)$  については, 補題 3.5 と命題 4.4 を用いて  $I_{2(n)}$  の次元を計算することにより,  $\mathcal{A}/I_2$  の次元が求められる.

**補題 4.7**  $\dim \mathcal{A}/I_2 = (k+1)(k+2)/2$

$I_3 = I_2 + \mathcal{A}f_2(y, z)$  についても, 補題 3.5, 補題 4.2, および命題 4.4 から  $I_{2(n)}$  と  $I_{3(n)}$  の次元の差が計算できて,  $\mathcal{A}/I_3$  の次元がわかる.

**補題 4.8**  $\dim \mathcal{A}/I_3 = k(k+1)/2 + 1$

$I_4 = I_3 + \mathcal{A}f_3(y, z)$  については, 補題 4.2 の  $f_2(y, z)$  の式の両辺に微分作用素  $D$  を作用させて  $f_3(y, z)$  を  $J = \mathbb{C}[y, z]f_0(y, z) + \mathbb{C}[y, z]f_1(y, z)$  の元として記述し, 補題 3.5 と命題 4.4 を用いて議論することにより, 次のことがわかる.

**補題 4.9**  $I_4 = I_3 \oplus \mathbb{C}f_3(y, z)$ ,  $\dim \mathcal{A}/I_4 = k(k+1)/2$

定義から  $I_4 \subset I \subset J \cap \mathcal{A}$  である. 補題 4.6 と上記の補題より, 次の定理を得る.

**定理 4.10**  $I = I_4$ ,  $J \cap \mathcal{A} = I$

この定理により,  $\mathcal{A}$  のイデアルについては  $f_0(y, z)$ ,  $f_1(y, z)$ ,  $f_2(y, z)$ ,  $f_3(y, z)$  の 4 つで十分であることがわかる.

## 5 $R_{\mathcal{W}}$ と $A(\mathcal{W})$

この節では、前節の結果を用いて  $R_{\mathcal{W}}$  の次元を決定し、 $R_{\mathcal{W}} \hookrightarrow R_{L(k,0)}$  を示す。さらに、 $R_{L(k,0)}$  と  $A(L(k,0))$  の性質を利用して  $A(\mathcal{W})$  を決定することにより、 $\mathcal{W} = K(sl_2, k)$  について第1節で述べた (1), (2), (3) の主張が成り立つことを示す。

$$\mathcal{U} = \{v \in V(k, 0) \mid h(0)v = 0\}$$

とおく。これは  $\mathcal{N} \subset \mathcal{U} \subset V(k, 0)$  を満たす頂点作用素代数である。(2.6) の形の元は  $h(0)$  の固有値  $2(q-r)$  の固有ベクトルだから、(2.6) の形の元のうち  $q=r$  であるものの全体は  $\mathcal{U}$  の基底になる。 $V(k, 0)$  の任意の部分集合  $S$  について、その  $R_{V(k,0)}$  における像  $S + C_2(V(k, 0))$  を  $\overline{S}$  で表すことにすると、 $\overline{\mathcal{U}} = \mathbb{C}[y, z]$  である。作用素  $h(0)$  は  $C_2(V(k, 0))$  を不変にするので、 $h(0) \cdot \overline{v} = \overline{h(0)v}$  として  $h(0)$  は  $R_{V(k,0)}$  に自然に作用する。さらに、 $h(0)u_{-1}v = (h(0)u)_{-1}v + u_{-1}h(0)v$  だから  $h(0)$  は  $R_{V(k,0)} = \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$  に微分作用素として作用する。実際、

$$h(0) \cdot y_0^p y_1^q y_2^r = 2(q-r)y_0^p y_1^q y_2^r$$

である。

$L(k, 0) = V(k, 0)/\mathcal{I}$  だから  $R_{L(k,0)} = L(k, 0)/C_2(L(k, 0))$  は  $V(k, 0)/(C_2(V(k, 0)) + \mathcal{I}) \cong R_{V(k,0)}/\overline{\mathcal{I}}$  と同型である。簡単のため  $R_{L(k,0)}$  と  $R_{V(k,0)}/\overline{\mathcal{I}}$  を同一視して、 $v \in V(k, 0)$  のとき  $R_{L(k,0)}$  の元を  $\overline{v} + \overline{\mathcal{I}}$  と表すことにする。

$L(k, 0)$  の基底は知られている (cf. [5, 12])。それを用いると、

$$y_0^p y_1^q y_2^r + \overline{\mathcal{I}}, \quad r \leq k, p+r \leq k, p+q \leq k \quad (5.1)$$

が  $R_{L(k,0)}$  の基底になることがわかる。 $h(0)$  は  $h(0) \cdot (\overline{v} + \overline{\mathcal{I}}) = h(0) \cdot \overline{v} + \overline{\mathcal{I}}$  として  $R_{L(k,0)}$  に作用し、 $y_0^p y_1^q y_2^r + \overline{\mathcal{I}}$  は  $h(0)$  の固有値  $2(q-r)$  の固有ベクトルだから、 $y^p z^q + \overline{\mathcal{I}}, q \leq k, p+q \leq k$  は  $R_{L(k,0)}^h = \{x \in R_{L(k,0)} \mid h(0) \cdot x = 0\}$  の基底である。これより特に、 $R_{L(k,0)}^h$  のウェイト  $n$  の部分空間  $(R_{L(k,0)}^h)_{(n)}$  の次元は

$$\dim(R_{L(k,0)}^h)_{(n)} = \begin{cases} [n/2] + 1 & \text{if } n \leq k \\ [n/2] + 1 - n + k & \text{if } k+1 \leq n \leq 2k \\ 0 & \text{if } n \geq 2k+1 \end{cases} \quad (5.2)$$

となることがわかる。また、

$$R_{L(k,0)}^h = (\overline{\mathcal{U}} + \overline{\mathcal{I}})/\overline{\mathcal{I}} \cong \overline{\mathcal{U}}/(\overline{\mathcal{U}} \cap \overline{\mathcal{I}}) \quad (5.3)$$

に注意する。

$\overline{\mathcal{U}} = \mathbb{C}[y, z]$  であった。(5.3) より  $\dim(R_{L(k,0)}^h)_{(n)}$  は  $\dim \overline{\mathcal{U}}_{(n)}$  と  $\dim(\overline{\mathcal{U}} \cap \overline{\mathcal{I}})_{(n)}$  の差である。よって補題 3.5, 補題 4.5 および (5.2) から、次の補題を得る。

**補題 5.1**  $J = \overline{U} \cap \overline{J}$

さらにこの補題と定理 4.10 より, 次のこともわかる.

**補題 5.2**  $I = \overline{N} \cap \overline{J} = \overline{I}$

定理 4.10 より  $I = I_4$  であった. 上記の補題の  $I = \overline{I}$  は, modulo  $C_2(\mathcal{N})$  では  $\mathcal{N}$  の極大イデアル  $\mathcal{I}$  の持つ情報は  $\mathbf{u}^0, W_1^3 \mathbf{u}^0, (W_1^3)^2 \mathbf{u}^0, (W_1^3)^3 \mathbf{u}^0$  の 4 個のベクトルで尽くされることを意味する.

$\overline{N}/\overline{I} \cong \mathcal{N}/(\mathcal{I} + C_2(\mathcal{N})) \cong R_{\mathcal{W}}$  だから,  $\overline{N} = \mathcal{A}$  に注意すると, 補題 4.9 と補題 5.2 より  $\dim R_{\mathcal{W}} = k(k+1)/2$  がわかる. また補題 5.2 より

$$\overline{N}/\overline{I} \cong (\overline{N} + \overline{J})/\overline{J} \subset (\overline{U} + \overline{J})/\overline{J} = R_{L(k,0)}^b \subset R_{L(k,0)}$$

だから,  $R_{\mathcal{W}} \hookrightarrow R_{L(k,0)}$  である. よって次の定理が得られた.

**定理 5.3** (1)  $\dim R_{\mathcal{W}} = k(k+1)/2$ , 特に  $\mathcal{W}$  は  $C_2$  余有限

(2)  $C_2(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap C_2(L(k,0))$ , すなわち  $R_{\mathcal{W}} \hookrightarrow R_{L(k,0)}$

$\mathcal{W}$  の Zhu 代数  $A(\mathcal{W})$  を考える.  $\mathcal{W} \subset L(k,0)$  だから  $O(\mathcal{W}) \subset O(L(k,0))$  であり,  $A(\mathcal{W}) \rightarrow A(L(k,0)); a + O(\mathcal{W}) \mapsto a + O(L(k,0))$  という結合代数の自然な準同型が定義できる. 一般に頂点作用素代数  $V$  について,  $R_V$  から  $A(V)$  への線形写像で全射であるものが存在する. したがって,

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathcal{W}} & \longrightarrow & R_{L(k,0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(\mathcal{W}) & \longrightarrow & A(L(k,0)) \end{array} \quad (5.4)$$

という線形写像の可換図形が得られる. ここで定理 5.3 より,  $R_{\mathcal{W}} \rightarrow R_{L(k,0)}$  は単射である. さらに,  $R_{L(k,0)} \rightarrow A(L(k,0))$  は全単射であることが知られている (cf. [6], [9, Section IV.2]). よって上記の可換図式において,  $R_{\mathcal{W}} \rightarrow A(\mathcal{W})$  は全単射で  $A(\mathcal{W}) \rightarrow A(L(k,0))$  は単射でなければならない. 以上により, 次の定理がわかった.

**定理 5.4** (1)  $\dim A(\mathcal{W}) = k(k+1)/2$

(2)  $O(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap O(L(k,0))$ , すなわち  $A(\mathcal{W}) \hookrightarrow A(L(k,0))$

$A(\mathcal{W}) \hookrightarrow A(L(k,0))$  だから,  $A(L(k,0))$  を  $A(\mathcal{W})$  加群と見ることができる. [8, Theorem 3.1.3] による  $A(L(k,0))$  の記述および [2, Proposition 4.5] から,  $A(\mathcal{W})$  加群として  $A(L(k,0))$  は半単純であることがわかる. よって,  $A(\mathcal{W})$  は結合代数として半単純である.

[2] の第 4 節において  $k(k+1)/2$  個の既約  $\mathcal{W}$  加群  $M^{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq k$ ,  $0 \leq j \leq i-1$  が具体的に構成されている. この構成法および  $A(\mathcal{W}) \hookrightarrow A(L(k,0))$  と  $A(\mathcal{W})$  の次元が  $k(k+1)/2$  であることから, これら  $k(k+1)/2$  個の  $M^{i,j}$  がどれも互いに同型ではないことが証明できる. 以上をまとめて, 次の定理を得る.

**定理 5.5** (1)  $A(W)$  は結合代数として半単純である.

(2) [2] で構成された  $k(k+1)/2$  個の既約  $W$  加群  $M^{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq k$ ,  $0 \leq j \leq i-1$  は, 既約  $W$  加群の同型類の完全代表系である.

## 6 おわりに

$k = 5, 6$  の場合は, [2, Section 5] において  $R_W$  および  $A(W)$  が決定されている. ここでの議論は, ウェイトが 8, 9, 10 の 3 個の null field および  $(W_1^3)^r \mathbf{u}^0$ ,  $r = 0, 1, 2, 3$  を (2.8) の形の元の線形結合として具体的に記述することに基づいている. 実際, ウェイトが 8, 9, 10 の null field については, 一般の  $k$  に対して (2.8) の形の元の線形結合で表されている. しかし,  $(W_1^3)^r \mathbf{u}^0$  を一般の  $k$  について (2.8) の形の元の線形結合として記述することは困難である.

本稿では, 埋込み  $R_N \hookrightarrow R_{V(k,0)}$  を用いて,  $R_{V(k,0)} = \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$  において計算を行うことにより  $R_W$  および  $A(W)$  を決定するのに必要な情報を得る, という方法を採用した. これにより, 任意の  $k$  について議論をすることが可能になった.

$k(k+1)/2$  個の既約  $W$  加群  $M^{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq k$ ,  $0 \leq j \leq i-1$  が互いに同型でないことは, [2, Proposition 4.5] から原理的には証明できるはずであるが, そこに現れる式が複雑なため現実的には難しい. これらの既約  $W$  加群  $M^{i,j}$  が互いに同型でないことを, 定理 5.5 では別の議論で証明した.

[1] および本稿で得られた結果により, [2, Conjecture 4.6] の予想のいくつかは肯定的に解決された. ここで, この予想に関する訂正を 1 つしておく. Zhu 代数  $A(W)$  は  $[W^2]$  と  $[W^3]$  の 2 つの元で生成されると予想されていたが, 以下で説明するようにこれは誤りである ([2] の  $\omega$  を本稿では  $W^2$  と記していることに注意する).

$o(W^s)$ ,  $s = 2, 3, 4, 5$  は既約加群  $M^{i,j}$  のトップレベル  $\mathbb{C}v^{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq k$ ,  $0 \leq j \leq i-1$  に次のように作用する (cf. [2, Proposition 4.5]).

$$\begin{aligned} o(W^2)v^{i,j} &= \frac{1}{2k(k+2)} \left( k(i-2j) - (i-2j)^2 + 2k(i-j+1)j \right) v^{i,j} \\ o(W^3)v^{i,j} &= \left( k^2(i-2j) - 3k(i-2j)^2 + 2(i-2j)^3 - 6k(i-2j)(i-j+1)j \right) v^{i,j} \\ o(W^4)v^{i,j} &= \left( 2k^2(k^2+k+1)(i-2j) - k(13k^2+8k+2)(i-2j)^2 \right. \\ &\quad + 2k(11k+6)(i-2j)^3 - (11k+6)(i-2j)^4 \\ &\quad + 4k^2(k-3)(k-2)(i-j+1)j - 4k^2(6k-5)(i-2j)(i-j+1)j \\ &\quad + 4k(11k+6)(i-2j)^2(i-j+1)j \\ &\quad \left. - 2k^2(6k-5)(i-j+1)(i-j+2)(j-1)j \right) v^{i,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
o(W^5)v^{i,j} = & \left( -2k^3(k^2 + 3k + 5)(i - 2j) + 5k^2(5k^2 + 6k + 6)(i - 2j)^2 \right. \\
& - 20k(4k^2 + 3k + 1)(i - 2j)^3 + 5k(19k + 12)(i - 2j)^4 \\
& - 2(19k + 12)(i - 2j)^5 \\
& + 10k^2(5k^2 - 14k + 20)(i - 2j)(i - j + 1)j \\
& - 20k^2(10k - 7)(i - 2j)^2(i - j + 1)j \\
& + 10k(19k + 12)(i - 2j)^3(i - j + 1)j \\
& \left. - 10k^2(10k - 7)(i - 2j)(i - j + 1)(i - j + 2)(j - 1)j \right) v^{i,j}
\end{aligned}$$

$v^{i,j}$  は  $o(W^2)$ ,  $o(W^3)$ ,  $o(W^4)$ ,  $o(W^5)$  の固有ベクトルであるが, その固有値の組を  $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$  で表すことにする. 与えられた  $k$  に対して,  $o(W^2)$  の固有値が共通であるような  $v^{i,j}$  の組合せは

$k = 5$  の場合の  $(i, j) = (1, 0)$  および  $(4, 0)$  のときの

$$(2/35, 12, 264, -264), \quad (2/35, -12, 264, 264)$$

$k = 9$  の場合の  $(i, j) = (4, 2)$ ,  $(5, 1)$  および  $(5, 4)$  のときの

$$\begin{aligned}
& (6/11, 0, -108864, 0), \quad (6/11, -756, -4536, -126360), \\
& (6/11, 756, -4536, 126360)
\end{aligned}$$

$k = 10$  の場合の  $(i, j) = (6, 2)$ ,  $(6, 4)$ ,  $(10, 1)$  および  $(10, 9)$  のときの

$$\begin{aligned}
& (9/10, -1104, -684576, -9332928), \quad (9/10, 1104, -684576, 9332928), \\
& (9/10, -4896, 1439424, 14732928), \quad (9/10, 4896, 1439424, -14732928)
\end{aligned}$$

のように, たくさんある.

これらの多くは,  $o(W^2)$  の固有値は共通であるが  $o(W^3)$  の固有値は共通ではない.  $k \leq 99$  の範囲で  $o(W^2)$  と  $o(W^3)$  の固有値がともに共通であるような  $v^{i,j}$  の組合せは, 以下のものに限る.

$k = 16$  の場合の  $(i, j) = (2, 1)$  および  $(8, 0)$  のときの

$$(1/9, 0, 372736, 0), \quad (1/9, 0, -186368, 0)$$

$k = 48$  の場合の  $(i, j) = (4, 2)$  および  $(24, 0)$  のときの

$$(3/25, 0, 83165184, 0), \quad (3/25, 0, -47056896, 0)$$

$k = 75$  の場合の  $(i, j) = (7, 1)$  および  $(35, 0)$  のときの

$$\begin{aligned}
& (4/33, 7000, 718515000, 31120425000), \\
& (4/33, 7000, -431550000, 7934850000)
\end{aligned}$$

同じく  $k = 75$  の場合の  $(i, j) = (7, 6)$  および  $(40, 0)$  のときの

$$\begin{aligned} & (4/33, -7000, 718515000, -31120425000), \\ & (4/33, -7000, -431550000, -7934850000) \end{aligned}$$

$k = 96$  の場合の  $(i, j) = (6, 3)$  および  $(48, 0)$  のときの

$$(6/49, 0, 2604220416, 0), \quad (6/49, 0, -1517764608, 0)$$

$k = 16, 48, 96$  の場合の固有値の組については,  $o(W^2)$ ,  $o(W^3)$ ,  $o(W^5)$  の固有値は共通で  $o(W^4)$  の固有値だけが異なる.

一方,  $k = 100$  の場合の  $(i, j) = (12, 1)$  および  $(12, 11)$  のときの固有値の組は

$$\begin{aligned} & (11/68, 0, 3160080000, 343569600000), \\ & (11/68, 0, 3160080000, -343569600000) \end{aligned}$$

であるが, この2つは  $o(W^2)$ ,  $o(W^3)$ ,  $o(W^4)$  の固有値は共通で  $o(W^5)$  の固有値だけが異なる.

$A(W)$  が4個の元  $[W^s]$ ,  $s = 2, 3, 4, 5$  で生成されることは [2, Lemma 2.6] で既知であるが, 以上の例により  $A(W)$  の生成系としては  $[W^4]$  と  $[W^5]$  も必要であることがわかる.

## 参考文献

- [1] C. Dong, C.H. Lam, Q. Wang and H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, *J. Algebra* **323** (2010), 371–381.
- [2] C. Dong, C.H. Lam and H. Yamada,  $W$ -algebras related to parafermion algebras, *J. Algebra* **322** (2009), 2366–2403.
- [3] C. Dong and Q. Wang, The structure of parafermion vertex operator algebras: general case, *Commun. Math. Phys.* **299** (2010), 783–792.
- [4] C. Dong and Q. Wang, On  $C_2$ -cofiniteness of parafermion vertex operator algebras, *J. Algebra* **328** (2011), 420–431.
- [5] B. Feigin, R. Kedem, S. Loktev, T. Miwa and E. Mukhin, Combinatorics of the  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  spaces of coinvariants, *Transform. Groups* **6** (2001), 25–52.
- [6] E. Feigin, The PBW filtration, *Represent. Theory* **13** (2009), 165–181.



- [7] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. 134, Academic Press, Boston, 1988.
- [8] I. B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.
- [9] M. R. Gaberdiel and T. Gannon, Zhu’s algebra, the  $C_2$  algebra, and twisted modules, in *Vertex operator algebras and related areas*, Contemp. Math. Vol. 497, 65–78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [10] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [11] J. Lepowsky and H.-S Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Progress in Math., Vol. 227, Birkhäuser, Boston, 2004.
- [12] A. Meurman and M. Primc, *Annihilating fields of standard modules of  $sl(2, \mathbb{C})$  and combinatorial identities*, Mem. Amer. Math. Soc. **652** (1999).
- [13] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.